OS SEGREDOS DA ÁLGEBRA

Volume 2

Miller Dias

Os Segredos da Algebra - Volume 2 | Miller Dias

Miller Dias de Araújo

Os Segredos da Álgebra

para IME ITA Olimpíadas

Volume 02

Editora Vestseller
FORTALEZA – CE
1ª Edição Novembro/2022

miLLLerdias@gmail.com

ISBN 978-65-87050-24-9

Editor responsável: Renato Brito Bastos Neto
Editoração: Miller Dias de Araújo
Capa: Iuri Gabriel de Oliveira Nogueira

Esta obra pode ser adquirida diretamente na
LIVRARIA VESTSELLER
através de sua página eletrônica *www.vestseller.com.br*

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).
Elaborado por Ana Pricila Celedonio da Silva
Bibliotecária CRB-3/1619

A663s Araújo, Miller Dias de.

Os Segredos da Álgebra para IME ITA Olimpíadas / Miller Dias de Araújo . – Fortaleza: Vestseller, 2022.

365 p. .: v. 2.

ISBN: 978-65-87050-24-9

1. Álgebra. 2. Matemática, ensino médio. 3. IME, ITA Olimpíadas. I. Título.

CDD: 512
CDU: 512

miLLLerDias@gmail.com

Apresentação

É consenso que a destreza no uso das ferramentas da Álgebra básica é um pilar fundamental para um posterior contato, bem sucedido, com a Matemática superior, quer em cursos de Matemática, ciências ou engenharias; ela é, ainda, imprescindível à aprendizagem da Física.

Nesse sentido, o volume 2 de “Os Segredos da Álgebra para IME ITA e Olimpíadas”, de Miller Dias de Araújo, traz uma impressionante coletânea de resultados, técnicas e problemas de Álgebra básica, versando sobre temas como o princípio de indução finita, sequências numéricas, recorrências lineares e desigualdades, para citar apenas os assuntos mais amplamente discutidos.

Para além de revisões sucintas dos resultados principais concernentes a cada tema, o livro concentra especial atenção no emprego dos mesmos à resolução de exercícios de calibre compatível com os vestibulares dos tradicionais IME e ITA, sem deixar de visitar as mais variadas competições de Matemática do globo. Isso é feito de duas maneiras, complementares: por um lado, pela discussão de um sem-número de exemplos resolvidos; por outro, pela propositura de outras tantas questões, dos mais variados graus de dificuldade.

O leitor que passar com sucesso pela leitura terá, certamente, adquirido uma proficiência invulgar nesta que, por vezes, é considerada a mais árida das áreas da Matemática.

Antônio Caminha Muniz Neto

Prefácio

A escrita deste *volume 2* abriu as portas para uma nova visão da Matemática, uma vez que, atualmente, as pessoas querem separá-la por temas isolados. No entanto, acontece que não há um conteúdo isolado, pois todos os assuntos são interligados, e portanto a proposta do livro é fazer essa ligação. A coleção, em cinco volumes, aborda todos os assuntos da álgebra do ensino médio e também alguns tópicos abordados no ensino fundamental, de modo a relacionar cada tema com outros ramos da matemática. Assim, minha pretensão é que você, leitor amigo, obtenha o máximo de ferramentas possíveis para ultrapassar os obstáculos desses assuntos.

No capítulo 1, é abordada a indução matemática, uma belíssima ferramenta que uso para provar vários teoremas, a compreensão de somatórios e produtórios junto a suas respectivas propriedades; as somas telescópicas e frações parciais que, juntas, nos permitem resolver uma gama de problemas difíceis à primeira vista; a congruência linear e noções de raízes complexas da unidade para aplicarmos na fatoração de polinômios, abrindo mais uma possibilidade para fatorar, inclusive, polinômios de graus maiores.

Nos capítulos 2 e 3, viajamos no mundo das sequências. Inicio com as famosas progressões aritmética (P.A.) e geométrica (P.G.), utilizando os operadores matemáticos para tratar de progressões de ordem superior. Faço, também, uma abordagem com relação aos números binomiais e uma abordagem polinomial, depois parto para as aritmético-geométrica (P.A.G.) e geométrico-aritmética (P.G.A) e finalizo com a harmônica (P.H.). Em cada uma delas, busquei expor todas as propriedades e demonstrações de forma clara e concisa. Em seguida, temos as famosas sequências de Fibonacci, a de Lucas e (talvez a menos conhecida) a de Pell. Busquei, aqui, explorar as propriedades mais frequentes, as relações entre elas e entre o número de ouro.

No capítulo 4, tratamos de um poderoso tema: Recorrências, que é uma nova maneira de trabalhar com sequências, buscando “fórmulas fechadas” ou termos gerais. Faço, nesse sentido, um estudo completo, mostrando cada passagem de forma que até um leitor iniciante no assunto conseguirá entendê-la e assimilá-la.

Já o capítulo 5 é dedicado às desigualdades, um tema bastante comum nas olimpíadas. Nesse capítulo, procurei diversificar as desigualdades; assim, o leitor terá uma gama de possibilidades para “atacar” os problemas, na medida em que cada uma delas é demonstrada (algumas delas com mais de uma demonstração).

No final da obra, temos os capítulos 6 e 7 com as respostas e as resoluções, respectivamente. E, ainda, alguns capítulos têm os tópicos avançados (propriedades não demonstradas).

Espero que você aproveite cada página desta obra, que foi feita com muito esmero. Vejo você, amigo leitor, no volume 3.

Miller Dias de Araújo

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram e me incentivaram em todas as minhas caminhadas.

A meus amigos, pelo apoio, motivação e incentivo; Meus professores, que ensinaram-me com muita dedicação.

Ao professor Antônio Caminha pela escrita da apresentação.

Ao professor Amadeu Moreira Fontenele Neto pelas revisões, no capricho.

Ao professor Renato Brito, pelas críticas e sugestões.

Ao professor Renato Madeira, pelas contribuições.

Ao professor Luiz Vieira dos Santos, pelos ensinamentos, pela paciência e por ter-me iniciado no caminho da Matemática IME ITA.

Sumário

Capítulo 03: Sequências Especiais

Capítulo 01 - Indução Matemática

Introdução

A indução matemática é um método de demonstração trabalhado geralmente em cursos de álgebra, em matemática discreta, em teoria dos números e tem muitas aplicações em várias áreas da matemática. Vamos aprender essa ferramenta poderosíssima!

1.1) Definição 01

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

- $P(1)$ é válida.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(n+1)$.

Então $P(n)$ é válida para todo número natural n.

Exemplo Resolvido 01: Mostre que, para todo inteiro positivo $n \geq 0$, o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

Resolução:

- Para n = 0, temos: $2^{2n} - 1 = 2^{2 \cdot 0} - 1 = 1 - 1 = 0$. (verdadeiro)
- Para n = 1, temos: $2^{2n} - 1 = 2^{2 \cdot 1} - 1 = 4 - 1 = 3$. (verdadeiro)
- Suponha que valha para n = k, ou seja:

$$2^{2k} - 1 = 3a \ \therefore \ \boxed{2^{2k} = 3a + 1}, \text{ com } a \in \mathbb{N}$$

- Mostre que vale para n = k + 1.

De fato, temos: $2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = 4 \cdot 2^{2k} - 1 = 4 \cdot (3a+1) - 1 = 12a + 4 - 1 =$
$= 12a + 3 = 3(4a+1)$.

Note claramente que $3(4a+1)$ é um múltiplo de 3, logo $2^{2(k+1)} - 1$ é divisível por 3.

Como queríamos demonstrar.

Exemplo Resolvido 02: Mostre que, para todo inteiro positivo $n \geq 0$, o número $n^3 - n$ é divisível por 3.

Resolução:

- Para n = 0, temos: $n^3 - n = 0^3 - 0 = 0 - 0 = 0$. (verdadeiro)
- Para n = 1, temos: $n^3 - n = 1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$. (verdadeiro)
- Para n = 2, temos: $n^3 - n = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$. (verdadeiro)
- Suponha que valha para n = k, ou seja: $n^3 - n = 3a,\ \text{com } a \in \mathbb{N}$.
- Mostre que vale para n = k + 1.

De fato, temos: $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n+1) = n^3 - n + 3\left(n^2 + n\right)$

$= 3a + 3\left(n^2 + n\right) = 3\left(a + n^2 + n\right)$.

Note claramente que $3\left(a + n^2 + n\right)$ é um múltiplo de 3, logo $(n+1)^3 - (n+1)$ é divisível por 3.

Como queríamos demonstrar.

Exemplo Resolvido 03: Prove que $1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Resolução:

- Para n = 2, temos: $1 + 2 = \dfrac{2(2+1)}{2} = 3$. (verdadeiro)
- Para n = 3, temos: $1 + 2 + 3 = \dfrac{3(3+1)}{2} = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$. (verdadeiro)
- Suponha que valha para n = k, ou seja: $1 + 2 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.
- Prove que vale para n = k + 1, ou seja: $1 + 2 + \ldots + k + k + 1 = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Adicionando k + 1 em ambos os membros:

$$S_k = 1 + 2 + \ldots + k \;\Rightarrow\; S_k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \;\Rightarrow\; S_{k+1} = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$\therefore\; \boxed{S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}}.$$

Como queríamos provar.

Exemplo Resolvido 04: Prove que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Resolução:

- Para n = 2, temos: $1^2 + 2^2 = \frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6} = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{6} = 5$. (V)

- Para n = 3, temos: $1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3(3+1)(2\cdot 3+1)}{6} = \frac{3\cdot 4\cdot 7}{6} = 14$. (V)

- Suponha que valha para n = k, ou seja: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

- Prove que vale para n = k + 1, ou seja:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Adicionando $(k+1)^2$ em ambos os membros:

$$S_k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 \;\Rightarrow\; S_k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$\Rightarrow\; S_{k+1}^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \;\Rightarrow\; S_{k+1}^2 = \frac{(k+1)\left[2k^2 + k + 6k + 6\right]}{6}$$

$$\Rightarrow\; S_{k+1}^2 = \frac{(k+1)\left(2k^2 + 7k + 6\right)}{6} \;\therefore\; \boxed{S_{k+1}^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}}.$$

Como queríamos provar.

1.2) Definição 02

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

- $P(a)$ é válida, para todo $a \in \mathbb{N}$.

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq a$ a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(n+1)$.

Então $P(n)$ é válida para todo número natural $n \geq a$.

Exemplo Resolvido 05: Mostre que $2^n > n^2, \ \forall n \geq 5$.

Resolução:
Se analisarmos os casos n = 1, n = 2, n = 3 e n = 4, notaremos que alguns são falsos, o que indica a necessidade da segunda definição. Então, para $n = 5$, temos: $2^5 > 5^2$ que é verdadeira. Note também que $n^2 > 2n+1$ para $n > 5$, pois $n^2 > 2n+1 \Rightarrow n^2 - 2n > 1 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 > 1 + 1 \Rightarrow (n-1)^2 > 2 \ (*)$
$\Rightarrow n - 1 > \sqrt{2} \ \therefore \ \boxed{n > \sqrt{2} + 1}$.

Observação: Aqui em $(*)$ usamos apenas a parte positiva, pois n é positivo.

- Suponhamos que valha para $n \geq 5$, então:

$2^n > n^2 \Rightarrow 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 \Rightarrow 2^{n+1} > n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1$
$\Rightarrow 2^{n+1} > 2 \cdot n^2 > (n+1)^2 \ \therefore \ \boxed{2^{n+1} > (n+1)^2}$.

Como queríamos demonstrar.

Exemplo Resolvido 06: Mostre que $n^2 > 3n, \ \forall n \geq 4$.

Resolução:
Se analisarmos os casos n = 1, n = 2 e n = 3, notaremos que alguns são falsos, o que indica a necessidade da segunda definição. Então, para $n = 4$, temos: $4^2 > 3 \cdot 4$ que é verdadeira.

- Suponhamos que valha para $n \geq 4$, então:

$$n^2 > 3n \Rightarrow n^2 + 2n + 1 > 3n + 2n + 1 \Rightarrow (n+1)^2 > 3n + 2n + 1$$

$$\overset{2n \geq 8}{\Rightarrow} (n+1)^2 \geq 3n + 8 + 1 = 3n + 3 \therefore \boxed{(n+1)^2 > 3(n+1)}.$$

Como queríamos demonstrar.

1.3) A notação de Somatório e Produtório

A notação de somatório (ou produtório) simplifica bastante as contas. Em outras palavras, ela compacta o cálculo de somas grandes quando usada repetidamente.

1.4) Definição de Somatório

Dada a sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, podemos escrever a soma de seus termos como $\sum_{i=1}^{n} a_i$ (lê-se: somatório de a_i, quando i vai de 1 até n).

1.5) Propriedades do Somatório

Vejamos algumas propriedades bastante úteis!

P1) Somatório de uma constante: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c}$.

<u>Demonstração:</u>

Da definição, temos: $\sum_{i=1}^{n} c = \overbrace{c + c + \ldots + c}^{\text{"n vezes"}} \therefore \boxed{\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c}$.

Exemplo Resolvido 07: Determine o valor de $\sum_{i=1}^{n} 5$.

Resolução:

Podemos escrever: $\sum_{i=1}^{n} 5 = \overbrace{5 + 5 + \ldots + 5}^{\text{"n vezes"}} \therefore \boxed{\sum_{i=1}^{n} 5 = 5n}$.

P2) Somatório do termo geral com uma constante: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i}$ **.**

<u>Demonstração:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \ldots + c \cdot a_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

$$\therefore \boxed{\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

Exemplo Resolvido 08: Determine o valor de $\sum_{i=1}^{n} 3i$.

Resolução:
Podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{n} 3i = 3 + 6 + \ldots + 3n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 3i = 3 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) \therefore \boxed{\sum_{i=1}^{n} 3i = 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i}.$$

P3) Somatório da soma de dois termos gerais: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}$ **.**

<u>Demonstração:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \therefore \boxed{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}.$$

Exemplo Resolvido 09: Determine o valor de $\sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + i\right)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + i\right) = 1^2 + 1 + 2^2 + 2 + \ldots + n^2 + n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + i\right) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + 1 + 2 + \ldots + n \therefore \boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + i\right) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i}.$$

P4) Produto de uma constante por um Somatório:

$$\boxed{k\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i\pm b_i)\right]=k\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i\pm k\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i}\,.$$

<u>Demonstração:</u>

$$k\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i\pm b_i)\right]=(a_1\pm b_1)\cdot k+(a_2\pm b_2)\cdot k+\ldots+(a_n\pm b_n)\cdot k$$

$$\Rightarrow\quad k\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i\pm b_i)\right]=a_1\cdot k\pm b_1\cdot k+a_2\cdot k\pm b_2\cdot k+\ldots+a_n\cdot k\pm b_n\cdot k$$

$$\Rightarrow\quad k\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i\pm b_i)\right]=k\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n)\pm k\cdot(b_1+b_2+\ldots+a_n)$$

$$\therefore\quad\boxed{k\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i\pm b_i)\right]=k\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i\pm k\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i}\,.$$

P5) Somatório da soma de vários termos gerais:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+\ldots+z_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i+\ldots+\sum_{i=1}^{n}z_i}\,.$$

<u>Demonstração:</u>

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+\ldots+z_i)=(a_1+b_1+\ldots+z_1)+(a_2+b_2+\ldots+z_2)+\ldots+(a_n+b_n+\ldots+z_n)$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+\ldots+z_i)=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n)+\ldots+(z_1+z_2+\ldots+z_n)$$

$$\therefore\quad\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+\ldots+z_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i+\ldots+\sum_{i=1}^{n}z_i}\,.$$

P6) Somatório da diferença: $\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i}$ **.**

<u>Demonstração:</u>

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\ldots+(a_n-b_n)\ \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (b_1 + b_2 + \ldots + a_n) \therefore \boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i}.$$

Exemplo Resolvido 10: Determine o valor de $\sum_{i=1}^{n}\left(i^4 - i^2\right)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i^4 - i^2\right) = 1^4 - 1^2 + 2^4 - 2^2 + \ldots + n^4 - n^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i^4 - i^2\right) = \left(1^4 + 2^4 + \ldots + n^4\right) - \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) \therefore \boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(i^4 - i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} i^4 - \sum_{i=1}^{n} i^2}.$$

P7) Soma Telescópica: $\boxed{\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) = a_n - a_1}$.

<u>Demonstração:</u>

$$\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) = \cancel{a_2} - a_1 + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} + a_n - \cancel{a_{n-1}}$$

$$\therefore \boxed{\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) = a_n - a_1}.$$

Exemplo Resolvido 11: Determine o valor de $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right) = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}}.$$

P8) Soma Parcial: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{j} a_i + \sum_{i=j+1}^{n} a_i}$.

<u>Demonstração:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_j\right) + \left(a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_n\right) \therefore \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{j} a_i + \sum_{i=j+1}^{n} a_i}.$$

Exemplo Resolvido 12: Prove que $2 + 4 + 6 + \ldots + (2n-2) + 2n = n(n+1)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = 2 + 4 + 6 + \ldots + (2n-2) + 2n \Rightarrow E = \sum_{i=1}^{n} 2i \Rightarrow E = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i$$

$$\Rightarrow E = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \therefore \boxed{E = n(n+1)}.$$

Como queríamos provar.

Exemplo Resolvido 13: Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) \Rightarrow E = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) \Rightarrow E = \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\Rightarrow E = n(n+1) - n \cdot 1 \Rightarrow E = n^2 + n - n \therefore \boxed{E = n^2}.$$

Como queríamos provar.

Exemplo Resolvido 14: Prove que

$$2^2 + 4^2 + \ldots + (2n-2)^2 + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$E = 2^2 + 4^2 + \ldots + (2n-2)^2 + (2n)^2 \Rightarrow E = \sum_{i=1}^{n} (2i)^2 \Rightarrow E = \sum_{i=1}^{n} 4i^2$$

$$\Rightarrow E = 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 \Rightarrow E = 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \therefore \boxed{E = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}}.$$

Como queríamos provar.

Exemplo Resolvido 15: Prove que

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-3)^2+(2n-1)^2=\frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$E=1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-3)^2+(2n-1)^2 \Rightarrow E=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2$$

$$\Rightarrow E=\sum_{i=1}^{n}\left(4i^2-4i+1\right) \Rightarrow E=4\cdot\sum_{i=1}^{n}i^2-4\cdot\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1$$

$$\Rightarrow E=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\cdot 1 \Rightarrow$$

$$E=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}-2n(n+1)+n \Rightarrow E=\frac{\overline{2n(n+1)}(2n+1)-3\cdot\overline{2n(n+1)}+3n}{3}$$

$$\Rightarrow E=\frac{\overline{2n(n+1)}\cdot(2n+1-3)+3n}{3} \Rightarrow E=\frac{\overline{2n(n+1)}\cdot(2n-2)+3n}{3}$$

$$\Rightarrow E=\frac{4n\left(n^2-1\right)+3n}{3} \Rightarrow E=\frac{n\left(4n^2-4+3\right)}{3} \therefore \boxed{E=\frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}}.$$

Como queríamos provar.

Exemplo Resolvido 16: Prove que

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)\cdot n+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)\cdot(n+2)}{3}.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$E=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)\cdot n+n\cdot(n+1) \Rightarrow E=\sum_{i=1}^{n}i\cdot(i+1)$$

$$\Rightarrow E=\sum_{i=1}^{n}\left(i^2+i\right) \Rightarrow E=\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i \Rightarrow E=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow E=\frac{\overline{n(n+1)}(2n+1)+3\overline{n(n+1)}}{6} \Rightarrow E=\frac{\overline{n(n+1)}(2n+1+3)}{6}$$

$$\Rightarrow E=\frac{\overline{n(n+1)}\cdot(2n+4)}{6} \Rightarrow E=\frac{\overline{n(n+1)}\cdot 2\cdot(n+2)}{6} \therefore \boxed{E=\frac{n(n+1)\cdot(n+2)}{3}}.$$

Como queríamos provar.

Exemplo Resolvido 17: Prove que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{(n+1)}.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$E=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n\cdot(n+1)} \Rightarrow E=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)}$$

$$\Rightarrow E=\sum_{i=1}^{n}\frac{1+i-i}{i\cdot(i+1)} \Rightarrow E=\sum_{i=1}^{n}\frac{\cancel{1+i}}{i\cdot\cancel{(i+1)}}-\frac{\cancel{i}}{\cancel{i}\cdot(i+1)} \Rightarrow E=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)$$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1} \Rightarrow E=\frac{n+1-1}{n+1} \therefore \boxed{E=\frac{n}{n+1}}.$$

Como queríamos provar.

1.6) Definição de Produtório

Dada a sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, podemos escrever o produto de seus termos como $\prod_{i=1}^{n} a_i$ (lê-se: produtório de a_i, quando i vai de 1 até n).

1.7) Propriedades do Produtório

Vejamos algumas propriedades bastante úteis!

P1) Produtório de uma constante: $\boxed{\prod_{i=1}^{n} c = c^n}$.

<u>Demonstração:</u>

Da definição, temos: $\prod_{i=1}^{n} c = \overbrace{c\cdot c\cdot\ldots\cdot c}^{\text{"n vezes"}} \therefore \boxed{\prod_{i=1}^{n} c = c^n}$.

P2) Produtório do termo geral com uma constante: $\boxed{\prod_{i=1}^{n} c\cdot a_i = c^n\cdot\prod_{i=1}^{n} a_i}$.

A escrita deste volume 2 abriu as portas para uma nova visão da Matemática, uma vez que, atualmente, as pessoas querem separá-la por temas isolados. No entanto, acontece que não há um conteúdo isolado, pois todos os assuntos são interligados, e portanto a proposta do livro é fazer essa ligação. A coleção, em cinco volumes, aborda todos os assuntos da álgebra do ensino médio e também alguns tópicos abordados no ensino fundamental, de modo a relacionar cada tema com outros ramos da matemática. Assim, minha pretensão é que você, leitor amigo, obtenha o máximo de ferramentas possíveis para ultrapassar os obstáculos desses assuntos.

No capítulo 1, é abordada a indução matemática, uma belíssima ferramenta que uso para provar vários teoremas, a compreensão de somatórios e produtórios junto a suas respectivas propriedades; as somas telescópicas e frações parciais que, juntas, nos permitem resolver uma gama de problemas difíceis à primeira vista; a congruência linear e noções de raízes complexas da unidade para aplicarmos na fatoração de polinômios, abrindo mais uma possibilidade para fatorar, inclusive, polinômios de graus maiores.

Nos capítulos 2 e 3, viajamos no mundo das sequências. Inicio com as famosas progressões aritmética (P.A.) e geométrica (P.G.), utilizando os operadores matemáticos para tratar de progressões de ordem superior. Faço, também, uma abordagem com relação aos números binomiais e uma abordagem polinomial, depois parto para as aritmético-geométrica (P.A.G.) e geométrico-aritmética (P.G.A) e finalizo com a harmônica (P.H.). Em cada uma delas, busquei expor todas as propriedades e demonstrações de forma clara e concisa. Em seguida, temos as famosas sequências de Fibonacci, a de Lucas e (talvez a menos conhecida) a de Pell. Busquei, aqui, explorar as propriedades mais frequentes, as relações entre elas e entre o número de ouro.

No capítulo 4, tratamos de um poderoso tema: Recorrências, que é uma nova maneira de trabalhar com sequências, buscando "fórmulas fechadas" ou termos gerais. Faço, nesse sentido, um estudo completo, mostrando cada passagem de forma que até um leitor iniciante no assunto conseguirá entendê-la e assimilá-la.

Já o capítulo 5 é dedicado às desigualdades, um tema bastante comum nas olimpíadas. Nesse capítulo, procurei diversificar as desigualdades; assim, o leitor terá uma gama de possibilidades para "atacar" os problemas, na medida em que cada uma delas é demonstrada (algumas delas com mais de uma demonstração).

No final da obra, temos os capítulos 6 e 7 com as respostas e as resoluções, respectivamente. E, ainda, alguns capítulos têm os tópicos avançados (propriedades não demonstradas).

Espero que você aproveite cada página desta obra, que foi feita com muito esmero. Vejo você, amigo leitor, no volume 3.

Miller Dias de Araújo

ISBN: 978-65-87050-24-9

9 786587 050249

EDITORA VestSeller

Os Segredos da Algebra - Volume 2 | Miller Dias