SEGREDOS DA LGEBRA



Volume 2

Miller Dias

Miller Dias de Araújo

Os Segredos da Álgebra para IME ITA Olimpíadas

Volume 02

Editora Vestseller FORTALEZA – CE 1ª Edição Novembro/2022 É proibida a reprodução parcial ou total por quaisquer meios sem autorização prévia do autor. Os transgressores serão punidos nos termos da lei. Denuncie o plágio, cópias ilegais, pirataria pela internet, sites para download pirata e comunidades piratas na internet anonimamente através do correjo eletrônico do autor:

miLLLerdias@gmail.com

Todos os direitos desta edição reservados a:
© 2022 Miller Dias de Araújo
ISBN 978-65-87050-24-9

Editor responsável: Renato Brito Bastos Neto Editoração: Miller Dias de Araújo Capa: Iuri Gabriel de Oliveira Nogueira

Esta obra pode ser adquirida diretamente na LIVRARIA VESTSELLER através de sua página eletrônica www.vestseller.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP). Elaborado por Ana Pricila Celedonio da Silva Bibliotecária CRB-3/1619

A663s Araújo, Miller Dias de.

Os Segredos da Álgebra para IME ITA Olimpíadas / Miller Dias de Araújo . – Fortaleza: Vestseller, 2022.

365 p. .: v. 2.

ISBN: 978-65-87050-24-9

 Álgebra. 2. Matemática, ensino médio. 3. IME, ITA Olimpíadas. I. Título.

> CDD: 512 CDU: 512



É proibida a reprodução parcial ou total por quaisquer meios sem autorização prévia do autor. Os transgressores serão punidos com base no artigo 7°, da lei 9.610/98. Denuncie o plágio ou cópias ilegais anonimamente através do correio eletrônico do autor:

miLLLerDias@gmail.com

Apresentação

É consenso que a destreza no uso das ferramentas da Álgebra básica é um pilar fundamental para um posterior contato, bem sucedido, com a Matemática superior, quer em cursos de Matemática, ciências ou engenharias; ela é, ainda, imprescindível à aprendizagem da Física.

Nesse sentido, o volume 2 de "Os Segredos da Álgebra para IME ITA e Olimpíadas", de Miller Dias de Araújo, traz uma impressionante coletânea de resultados, técnicas e problemas de Álgebra básica, versando sobre temas como o princípio de indução finita, sequências numéricas, recorrências lineares e desigualdades, para citar apenas os assuntos mais amplamente discutidos.

Para além de revisões sucintas dos resultados principais concernentes a cada tema, o livro concentra especial atenção no emprego dos mesmos à resolução de exercícios de calibre compatível com os vestibulares dos tradicionais IME e ITA, sem deixar de visitar as mais variadas competições de Matemática do globo. Isso é feito de duas maneiras, complementares: por um lado, pela discussão de um sem-número de exemplos resolvidos; por outro, pela propositura de outras tantas questões, dos mais variados graus de dificuldade.

O leitor que passar com sucesso pela leitura terá, certamente, adquirido uma proficiência invulgar nesta que, por vezes, é considerada a mais árida das áreas da Matemática.

Antônio Caminha Muniz Neto

Prefácio

A escrita deste *volume 2* abriu as portas para uma nova visão da Matemática, uma vez que, atualmente, as pessoas querem separá-la por temas isolados. No entanto, acontece que não há um conteúdo isolado, pois todos os assuntos são interligados, e portanto a proposta do livro é fazer essa ligação. A coleção, em cinco volumes, aborda todos os assuntos da álgebra do ensino médio e também alguns tópicos abordados no ensino fundamental, de modo a relacionar cada tema com outros ramos da matemática. Assim, minha pretensão é que você, leitor amigo, obtenha o máximo de ferramentas possíveis para ultrapassar os obstáculos desses assuntos.

No capítulo 1, é abordada a indução matemática, uma belíssima ferramenta que uso para provar vários teoremas, a compreensão de somatórios e produtórios junto a suas respectivas propriedades; as somas telescópicas e frações parciais que, juntas, nos permitem resolver uma gama de problemas difíceis à primeira vista; a congruência linear e noções de raízes complexas da unidade para aplicarmos na fatoração de polinômios, abrindo mais uma possibilidade para fatorar, inclusive, polinômios de graus maiores.

Nos capítulos 2 e 3, viajamos no mundo das sequências. Inicio com as famosas progressões aritmética (P.A.) e geométrica (P.G.), utilizando os operadores matemáticos para tratar de progressões de ordem superior. Faço, também, uma abordagem com relação aos números binomiais e uma abordagem polinomial, depois parto para as aritmético-geométrica (P.A.G.) e geométrico-aritmética (P.G.A) e finalizo com a harmônica (P.H.). Em cada uma delas, busquei expor todas as propriedades e demonstrações de forma clara e concisa. Em seguida, temos as famosas sequências de Fibonacci, a de Lucas e (talvez a menos conhecida) a de Pell. Busquei, aqui, explorar as propriedades mais frequentes, as relações entre elas e entre o número de ouro.

No capítulo 4, tratamos de um poderoso tema: Recorrências, que é uma nova maneira de trabalhar com sequências, buscando "fórmulas fechadas" ou termos gerais. Faço, nesse sentido, um estudo completo, mostrando cada passagem de forma que até um leitor iniciante no assunto conseguirá entendêla e assimilá-la.

Já o capítulo 5 é dedicado às desigualdades, um tema bastante comum nas olimpíadas. Nesse capítulo, procurei diversificar as desigualdades; assim, o leitor terá uma gama de possibilidades para "atacar" os problemas, na medida em que cada uma delas é demonstrada (algumas delas com mais de uma demonstração).

No final da obra, temos os capítulos 6 e 7 com as respostas e as resoluções, respectivamente. E, ainda, alguns capítulos têm os tópicos avançados (propriedades não demonstradas).

Espero que você aproveite cada página desta obra, que foi feita com muito esmero. Vejo você, amigo leitor, no volume 3.

Miller Dias de Araújo

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram e me incentivaram em todas as minhas caminhadas.

A meus amigos, pelo apoio, motivação e incentivo; Meus professores, que ensinaram-me com muita dedicação.

Ao professor Antônio Caminha pela escrita da apresentação.

Ao professor Amadeu Moreira Fontenele Neto pelas revisões, no capricho.

Ao professor Renato Brito, pelas críticas e sugestões.

Ao professor Renato Madeira, pelas contribuições.

Ao professor Luiz Vieira dos Santos, pelos ensinamentos, pela paciência e por ter-me iniciado no caminho da Matemática IME ITA.

Sumário

Capítulo 01: Indução, Congruência Linear e Aplicações de	
Números Complexos em Fatoração de Polinômios	
1.1) Definição 01 de Indução	13
1.2) Definição 02 de Indução	16
1.3) A Notação de Somatório e Produtório	16
1.4) Definição de Somatório	17
1.5) Propriedades do Somatório	17
1.6) Definição de Produtório	22
	23
1.8) Definição de Congruência Linear	31
1.9) Consequências da Definição	31
1.10) Propriedades da Congruência	32
1.11) Números Complexos: Raízes da Unidade	37
Capítulo 02: Sequências e Séries	
2.1) Definição de Sequências	41
2.2) Sequência Monótona	41
2.3) Soma Parcial e Série	41
2.4) Definição de Progressão Aritmética (PA)	42
2.5) Classificação de uma PA	42
2.6) Termo Geral	42
2.7) Termo Geral, em Função de um Termo de Índice k	43
2.8) Casos Especiais	44
2.9) Propriedades da PA	44
2.10) Interpolação de Meios Aritméticos	49
2.11) Soma dos n Primeiros Termos	53
2.12) Soma dos Termos, em Função de um Termo de Índice k	56
2.13) Soma dos Termos, em Função da Soma de Índice k	57
2.14) Operador Diferença	63
2.15) Definição de PA de Ordem Superior	63
2 16) PA de Ordem 1	33

2.17) Termo Geral, com Coeficientes Binomiais	64
2.18) Termo Geral, como Polinômio, em n	64
2.19) Soma dos Termos, com Coeficientes Binomiais	64
2.20) Soma dos Termos, como Polinômio, em n	65
2.21) PA de Ordem 2	66
2.22) Termo Geral, com Coeficientes Binomiais	66
2.23) Termo Geral, como Polinômio, em n	67
2.24) Soma dos Termos, com Coeficientes Binomiais	67
2.25) Soma dos Termos, como Polinômio, em n	69
2.26) Resumindo os Termos Gerais, em PA de Ordem Superior.	73
2.27) Resumindo as Somas dos Termos, em PA de Ordem	
Superior	73
2.28) Propriedades das PA's de Ordem Superior	74
2.29) Operações com os Termos de uma PA	74
2.30) Definição de PG	83
2.31) Classificação de uma PG	83
2.32) Termo Geral	84
2.33) Termo Geral, em Função de um Termo de Índice k	85
2.34) Casos Especiais	85
2.35) Propriedades da PG	86
2.36) Interpolação de Meios Geométricos	89
2.37) Soma de uma PG	93
2.38) Soma dos Termos de uma PG Finita, em Função de um	
Termo de Índice k	97
2.39) Soma dos Termos de uma PG Finita, em Função da Soma	
de Índice k	97
2.40) Produto dos Termos de uma PG Finita	98
2.41) Produto dos Termos de uma PG Finita, em Função de um	
Termos de Índice k	98
2.42) Produto dos Termos de uma PG Finita, em Função do	
Produto de Índice k	99
2.43) Relações entre PA's e PG's	106
2.44) Operador Quociente	112
2.45) Definição de PG de Ordem Superior	112
2.46) PG de Ordem 1	112
2.47) Termo Geral, com Coeficientes Binomiais	113
2.48) Soma dos Termos, com Coeficientes Binomiais	113
2.49) Produto dos Termos, com Coeficientes Binomiais	115

2.50) PG de Ordem 2	117
2.51) Termo Geral, com Coeficientes Binomiais	117
2.52) Soma dos Termos	118
2.53) Produto dos Termos, com Coeficientes Binomiais	119
2.54) Resumindo os Termos Gerais, em PG de Ordem Superior.	121
2.55) Resumindo as Somas dos Termos, em PG de Ordem	
Superior	121
2.56) Resumindo os Produtos dos Termos, em PG de Ordem	
Superior	122
2.57) Propriedades das PG's de Ordem Superior	122
2.58) Definição de PAG	123
2.59) Termo Geral	123
2.60) Termo Geral, em Função de um Termo de Índice k	123
2.61) Soma dos Termos de uma PAG Finita	124
2.62) Soma dos Termos de uma PAG Finita, em Função de um	
Termo de Ordem k	125
2.63) Soma dos Termos de uma PAG Infinita	126
2.64) Soma dos Termos de uma PAG Infinita, em Função de um	
Termo de Ordem k	127
2.65) Definição de PGA	130
2.66) Termo Geral	130
2.67) Termo Geral, em Função de um Termo de Índice k	130
2.68) Soma dos Termos de PGA	131
2.69) Definição de PH	132
2.70) Classificação de uma PH	132
2.71) Termo Geral	132
2.72) Termo Geral, em Função de um Termo de Índice k	132
2.73) Propriedades	133
2.74) Interpolação de Meios Harmônicos	133
Canítula 02: Caguânaias Fanaciais	
Capítulo 03: Sequências Especiais	107
3.1) Definição da Sequência de Fibonacci	137
3.2) Propriedades	137 142
3.3) Identidade de Cassini	
3.4) A Fórmula de Binet	143 146
3.5) Definição da Sequência de Lucas	
3.6) Propriedades	146 151
3.7) Identidade de Cassini	151

3.8) A Fórmula de Binet	151
3.9) Relações entre as Sequências de Fibonacci e Lucas	152
3.10) Definição da Sequência de Pell	155
3.11) Propriedades	155
3.12) Identidade de Cassini	156
3.13) Identidade de Catalan	157
3.14) Tópicos Avançados	159
Capítulo 04: Recorrências	
4.1) Definição de Recorrência	161
4.2) Ordem de uma Recorrência	161
4.3) Homogeneidade	161
4.4) Linearidade	162
4.5) Resolução de uma Recorrência Linear, Homogênea e de	
1ª Ordem com Coeficientes Constantes	162
4.6) Resolução de uma Recorrência Linear, não Homogênea e	
de 1ª Ordem com Coeficientes Constantes	154
4.7) Resolução de uma Recorrência Linear, não Homogênea e	
de 1ª Ordem com Coeficientes não Constantes	165
4.8) Resolução de uma Recorrência Linear, Homogênea e de	
2ª Ordem com Coeficientes Constantes	178
4.9) Resolução de uma Recorrência Linear, não Homogênea e	
de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes	185
4.10) Aplicações da Recorrência	197
Capítulo 05: Desigualdades	
5.1) Definição de Média	203
5.2) Desigualdade das Médias	209
5.3) Desigualdade das Médias Ponderada	217
5.4) Técnica do Balanceamento de Coeficientes	224
5.5) Validade da Desigualdade das Médias Aritmética e	
Geométrica	224
5.6) Desigualdade de Huygens	236
5.7) Desigualdade de Mahler	237
5.8) Desigualdade de Mahler Ponderada	239
5.9) Desigualdade de Cauchy-Schwarz	243
5.10) Teorema de Abel	252
5.11) Desigualdade de Abel	252

5.12) Desigualdade do Rearranjo
5.13) Desigualdade de Chebychev
5.14) Desigualdade de Bernoulli
5.15) Desigualdade Homogênea, Homogeneização e
Normalização
5.16) Desigualdade Simétrica
5.17) Desigualdade de Newton
5.18) Desigualdade de MacLaurin
5.19) Majoração
5.20) Desigualdade de Muirhead
5.21) Função Convexa e Função Côncava
5.22) Desigualdade de Karamata
5.23) Desigualdade de Jensen
5.24) Desigualdade de Young
5.25) Desigualdade de Holder
5.26) Desigualdade de Minkowski
5.27) Generalização da Desigualdade de Minkowski
5.28) Desigualdade de Schur
5.29) Tópicos Avançados

Capítulo 06: Respostas e Sugestões

Capítulo 07: Resoluções

Bibliografia

Capítulo 01 - Indução Matemática

Introdução

A indução matemática é um método de demonstração trabalhado geralmente em cursos de álgebra, em matemática discreta, em teoria dos números e tem muitas aplicações em várias áreas da matemática. Vamos aprender essa ferramenta poderosíssima!

1.1) Definição 01

Seja P(n) uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

- P(1) é válida.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ a validade de P(n) implica na validade de P(n+1).

Então P(n) é válida para todo número natural n.

Exemplo Resolvido 01: Mostre que, para todo inteiro positivo $n \ge 0$, o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

Resolução:

- Para n = 0, temos: $2^{2n} 1 = 2^{2 \cdot 0} 1 = 1 1 = 0$. (verdadeiro)
- Para n = 1, temos: $2^{2n} 1 = 2^{2 \cdot 1} 1 = 4 1 = 3$, (verdadeiro)
- Suponha que valha para n = k, ou seja:

$$2^{2k}-1=3a \ \ \therefore \ \boxed{2^{2k}=3a+1}, \ com \ a\in \mathbb{N}$$

• Mostre que vale para n = k + 1.

De fato, temos:
$$2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = 4 \cdot 2^{2k} - 1 = 4 \cdot (3a+1) - 1 = 12a + 4 - 1 = 12a + 3 = 3(4a+1)$$
.

Note claramente que 3(4a+1) é um múltiplo de 3, logo $2^{2(k+1)}-1$ é divisível por 3.

Como queríamos demonstrar.

Exemplo Resolvido 02: Mostre que, para todo inteiro positivo $n \ge 0$, o número $n^3 - n$ é divisível por 3.

Resolução:

- Para n = 0, temos: $n^3 n = 0^3 0 = 0 0 = 0$. (verdadeiro)
- Para n = 1, temos: $n^3 n = 1^3 1 = 1 1 = 0$. (verdadeiro)
- Para n = 2, temos: $n^3 n = 2^3 2 = 8 2 = 6$. (verdadeiro)
- Suponha que valha para n = k, ou seja: $n^3 n = 3a$, com $a \in \mathbb{N}$.
- Mostre que vale para n = k + 1.

De fato, temos:
$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n+1) = n^3 - n + 3(n^2 + n)$$

= $3a + 3(n^2 + n) = 3(a + n^2 + n)$.

Note claramente que $3(a+n^2+n)$ é um múltiplo de 3, logo $(n+1)^3-(n+1)$ é divisível por 3.

Como queríamos demonstrar.

Exemplo Resolvido 03: Prove que
$$1 + 2 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
.

Resolução:

- Para n = 2, temos: $1+2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$. (verdadeiro)
- Para n = 3, temos: $1+2+3=\frac{3(3+1)}{2}=\frac{3\cdot 4}{2}=6$. (verdadeiro)
- Suponha que valha para n = k, ou seja: $1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$.
- Prove que vale para n = k + 1, ou seja: $1+2+...+k+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Adicionando k + 1 em ambos os membros:

$$\begin{split} S_k &= 1 + 2 + \ldots + k \ \Rightarrow \ S_k + k + 1 = \frac{k \left(k + 1\right)}{2} + k + 1 \ \Rightarrow \ S_{k+1} = \frac{k \left(k + 1\right) + 2 \left(k + 1\right)}{2} \\ & \therefore \ \left[S_{k+1} = \frac{\left(k + 1\right) \left(k + 2\right)}{2} \right]. \end{split}$$

Como queríamos provar.

Exemplo Resolvido 04: Prove que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
.

Resolução:

• Para n = 2, temos:
$$1^2 + 2^2 = \frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6} = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{6} = 5$$
. (V)

• Para n = 3, temos:
$$1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3(3+1)(2\cdot 3+1)}{6} = \frac{3\cdot 4\cdot 7}{6} = 14$$
. (V)

• Suponha que valha para n = k, ou seja:
$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
.

Prove que vale para n = k + 1, ou seja:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \left(k+1\right)^2 = \frac{\left(k+1\right)\!\left(k+2\right)\!\left(2k+3\right)}{6} \, .$$

Adicionando $(k+1)^2$ em ambos os membros:

$$\begin{split} S_k^2 &= 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 & \Rightarrow S_k^2 + \left(k+1\right)^2 = \frac{k\left(k+1\right)\left(2k+1\right)}{6} + \left(k+1\right)^2 \\ & \Rightarrow S_{k+1}^2 = \frac{k\left(k+1\right)\left(2k+1\right) + 6\left(k+1\right)^2}{6} & \Rightarrow S_{k+1}^2 = \frac{\left(k+1\right)\left[2k^2 + k + 6k + 6\right]}{6} \\ & \Rightarrow S_{k+1}^2 = \frac{\left(k+1\right)\left(2k^2 + 7k + 6\right)}{6} & \therefore & S_{k+1}^2 = \frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(2k+3\right)}{6} \,. \end{split}$$

Como queríamos provar.

1.2) Definição 02

Seja P(n) uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

- P(a) é válida, para todo $a \in \mathbb{N}$.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \ge a$ a validade de P(n) implica na validade de P(n+1).

Então P(n) é válida para todo número natural $n \ge a$.

Exemplo Resolvido 05: Mostre que $2^n > n^2$, $\forall n \ge 5$.

Resolução:

Se analisarmos os casos n = 1, n = 2, n = 3 e n = 4, notaremos que alguns são falsos, o que indica a necessidade da segunda definição. Então, para n = 5, temos: $2^5 > 5^2$ que é verdadeira. Note também que $n^2 > 2n+1$ para n > 5, pois $n^2 > 2n+1 \Rightarrow n^2-2n>1 \Rightarrow n^2-2n+1>1+1 \Rightarrow (n-1)^2 > 2$ (*) $\Rightarrow n-1>\sqrt{2}$.: $n>\sqrt{2}+1$.

Observação: Aqui em (*) usamos apenas a parte positiva, pois n é positivo.

• Suponhamos que valha para n≥5, então:

$$\begin{split} 2^n > n^2 & \implies 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 & \implies 2^{n+1} > n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 \\ & \implies 2^{n+1} > 2 \cdot n^2 > \left(n+1\right)^2 & \therefore & \boxed{2^{n+1} > \left(n+1\right)^2} \;. \end{split}$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo Resolvido 06: Mostre que $n^2 > 3n$, $\forall n \ge 4$.

Resolução:

Se analisarmos os casos n=1, n=2 e n=3, notaremos que alguns são falsos, o que indica a necessidade da segunda definição. Então, para n=4, temos: $4^2>3\cdot 4$ que é verdadeira.

Suponhamos que valha para n≥4, então:

$$\begin{split} n^2 &> 3n \ \Rightarrow \ n^2 + 2n + 1 > 3n + 2n + 1 \ \Rightarrow \ \left(n + 1\right)^2 > 3n + 2n + 1 \\ \stackrel{2n \, \geq \, 8}{\Rightarrow} \ \left(n + 1\right)^2 &\geq 3n + 8 + 1 = 3n + 3 \ \therefore \ \left[\left(n + 1\right)^2 > 3\left(n + 1\right)\right]. \end{split}$$

Como queríamos demonstrar.

1.3) A notação de Somatório e Produtório

A notação de somatório (ou produtório) simplifica bastante as contas. Em outras palavras, ela compacta o cálculo de somas grandes quando usada repetidamente.

1.4) Definição de Somatório

Dada a sequência $(a_1, a_2, ..., a_n)$, podemos escrever a soma de seus termos

como
$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$
 (lê-se: somatório de a_i , quando i vai de 1 até n).

1.5) Propriedades do Somatório

Vejamos algumas propriedades bastante úteis!

P1) Somatório de uma constante:
$$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$$
 .

Demonstração:

$$\text{Da definição, temos: } \sum_{i=1}^{n} c = \overbrace{c+c+\ldots+c}^{"n \ vezes"} \ \ \therefore \ \ \sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c \ \ .$$

Exemplo Resolvido 07: Determine o valor de $\sum_{i=1}^{n} 5$.

Resolução:

Podemos escrever:
$$\sum_{i=1}^{n} 5 = \overbrace{5+5+\ldots+5}^{\text{"n vezes"}} \therefore \boxed{\sum_{i=1}^{n} 5 = 5n}.$$

P2) Somatório do termo geral com uma constante: $\left|\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_{i} = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i}\right|$.

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Demonstração:

$$\begin{split} &\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \ldots + c \cdot a_n \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) \\ & \therefore \ \left[\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i\right]. \end{split}$$

Exemplo Resolvido 08: Determine o valor de $\sum_{i=1}^{n} 3i$.

Resolução:

Podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{n} 3i = 3 + 6 + \ldots + 3n \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} 3i = 3 \cdot \left(1 + 2 + \ldots + n\right) \ \therefore \ \left[\sum_{i=1}^{n} 3i = 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i\right].$$

P3) Somatório da soma de dois termos gerais: $\left|\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\right|$.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n) \implies$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + b_i\right) = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) + \left(b_1 + b_2 + \ldots + b_n\right) \ \ \vdots \ \ \left[\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\right].$$

Exemplo Resolvido 09: Determine o valor de $\sum_{i=1}^{11} (i^2 + i)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{n} (i^2 + i) = 1^2 + 1 + 2^2 + 2 + \dots + n^2 + n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + i \right) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + 1 + 2 + \ldots + n \ \therefore \ \left[\sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + i \right) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i \right].$$

P4) Produto de uma constante por um Somatório:

$$\boxed{k \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i)\right] = k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \pm k \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i}.$$

Demonstração:

$$\begin{split} k \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) \right] &= (a_1 \pm b_1) \cdot k + (a_2 \pm b_2) \cdot k + \ldots + (a_n \pm b_n) \cdot k \\ \Rightarrow k \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) \right] &= a_1 \cdot k \pm b_1 \cdot k + a_2 \cdot k \pm b_2 \cdot k + \ldots + a_n \cdot k \pm b_n \cdot k \\ \Rightarrow k \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) \right] &= k \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm k \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + a_n) \\ \therefore \left[k \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) \right] &= k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \pm k \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \right]. \end{split}$$

P5) Somatório da soma de vários termos gerais:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + \ldots + z_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + \ldots + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

Demonstração:

$$\begin{split} &\sum_{i=1}^{n} \left(a_{i} + b_{i} + \ldots + z_{i}\right) = \left(a_{1} + b_{1} + \ldots + z_{1}\right) + \left(a_{2} + b_{2} + \ldots + z_{2}\right) + \ldots + \left(a_{n} + b_{n} + \ldots + z_{n}\right) \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(a_{i} + b_{i} + \ldots + z_{i}\right) = \left(a_{1} + a_{2} + \ldots + a_{n}\right) + \left(b_{1} + b_{2} + \ldots + b_{n}\right) + \ldots + \left(z_{1} + z_{2} + \ldots + z_{n}\right) \\ &\therefore \left[\sum_{i=1}^{n} \left(a_{i} + b_{i} + \ldots + z_{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} z_{i}\right]. \end{split}$$

P6) Somatório da diferença:
$$\left|\sum_{i=1}^{n} \left(a_i - b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\right|.$$

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i} - b_{i}) = (a_{1} - b_{1}) + (a_{2} - b_{2}) + ... + (a_{n} - b_{n}) \implies$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_{i} - b_{i}\right) = \left(a_{1} + a_{2} + \ldots + a_{n}\right) - \left(b_{1} + b_{2} + \ldots + a_{n}\right) \therefore \left[\sum_{i=1}^{n} \left(a_{i} - b_{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i} - \sum_{i=1}^{n} b_{i}\right].$$

Exemplo Resolvido 10: Determine o valor de $\sum_{i=1}^{n} (i^4 - i^2)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{split} \sum_{i=1}^{n} \left(i^4 - i^2 \right) &= 1^4 - 1^2 + 2^4 - 2^2 + \ldots + n^4 - n^2 \implies \\ \sum_{i=1}^{n} \left(i^4 - i^2 \right) &= \left(1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 \right) - \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \right) \therefore \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(i^4 - i^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} i^4 - \sum_{i=1}^{n} i^2} \;. \end{split}$$

P7) Soma Telescópica: $\sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = a_n - a_1$.

Demonstração:

$$\begin{split} &\sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{i+1} - a_i\right) = \left(a_2 - a_1\right) + \left(a_3 - a_2\right) + \ldots + \left(a_{n-1} - a_{n-2}\right) + \left(a_n - a_{n-1}\right) \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{i+1} - a_i\right) = \left(a_2 - a_1\right) + \left(a_3 - a_2\right) + \ldots + \left(a_{n-1} - a_{n-2}\right) + \left(a_n - a_{n-1}\right) \\ &\therefore \left(a_{i+1} - a_i\right) = \left(a_2 - a_1\right) + \left(a_3 - a_2\right) + \ldots + \left(a_{n-1} - a_{n-2}\right) + \left(a_n - a_{n-1}\right) \\ &\therefore \left(a_{i+1} - a_i\right) = \left(a_2 - a_1\right) + \left(a_3 - a_2\right) + \ldots + \left(a_{n-1} - a_{n-2}\right) + \left(a_n - a_{n-1}\right) \\ &\therefore \left(a_{i+1} - a_i\right) = \left(a_2 - a_1\right) + \left(a_3 - a_2\right) + \ldots + \left(a_{n-1} - a_{n-2}\right) + \left(a_n - a_{n-1}\right) \\ &\therefore \left(a_{i+1} - a_i\right) = \left(a_1 - a_1\right) + \left(a_1$$

Exemplo Resolvido 11: Determine o valor de $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{split} &\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &\therefore \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right]. \end{split}$$

P8) Soma Parcial:
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{j} a_i + \sum_{i=j+1}^{n} a_i$$

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_j\right) + \left(a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_n\right) \ \ \vdots \ \ \left[\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^j a_i + \sum_{i=j+1}^n a_i\right].$$

Exemplo Resolvido 12: Prove que 2+4+6+...+(2n-2)+2n=n(n+1).

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{split} E &= 2+4+6+\ldots + \left(2n-2\right) + 2n \ \Rightarrow \ E = \sum_{i=1}^n 2i \ \Rightarrow \ E = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i \\ \Rightarrow \ E &= 2 \cdot \frac{n\left(n+1\right)}{2} \ \therefore \ \boxed{E = n\left(n+1\right)} \,. \end{split}$$

Como queríamos provar.

Exemplo Resolvido 13: Prove que $1+3+5+...+(2n-3)+(2n-1)=n^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{split} E &= 1+3+5+\ldots + \left(2n-3\right) + \left(2n-1\right) \ \Rightarrow \ E = \sum_{i=1}^n \left(2i-1\right) \ \Rightarrow \ E = \sum_{i=1}^n 2i \ -\sum_{i=1}^n 1i \\ \Rightarrow \ E &= n \left(n+1\right) - n \cdot 1 \ \Rightarrow \ E = n^2 + n - n \ \therefore \ \boxed{E = n^2} \ . \end{split}$$

Como queríamos provar.

Exemplo Resolvido 14: Prove que

$$2^2 + 4^2 + ... + (2n-2)^2 + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{split} E &= 2^2 + 4^2 + \ldots + \left(2n - 2\right)^2 + \left(2n\right)^2 \ \Rightarrow \ E &= \sum_{i=1}^n \left(2i\right)^2 \ \Rightarrow \ E &= \sum_{i=1}^n 4i^2 \\ \Rightarrow \ E &= 4 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 \ \Rightarrow \ E &= 4 \cdot \frac{n \left(n+1\right) \left(2n+1\right)}{6} \ \therefore \ \boxed{E &= \frac{2n \left(n+1\right) \left(2n+1\right)}{3}}. \end{split}$$

Como queríamos provar.

Exemplo Resolvido 15: Prove que

$$1^{2} + 3^{2} + 5^{2} + ... + (2n - 3)^{2} + (2n - 1)^{2} = \frac{n(4n^{2} - 1)}{3}.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{split} E &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + \left(2n - 3\right)^2 + \left(2n - 1\right)^2 \ \Rightarrow \ E = \sum_{i = 1}^n \left(2i - 1\right)^2 \\ \Rightarrow \ E &= \sum_{i = 1}^n \left(4i^2 - 4i + 1\right) \ \Rightarrow \ E &= 4 \cdot \sum_{i = 1}^n i^2 \ - 4 \cdot \sum_{i = 1}^n i \ + \sum_{i = 1}^n 1 \\ \Rightarrow \ E &= 4 \cdot \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} - 4 \cdot \frac{n(n + 1)}{2} + n \cdot 1 \ \Rightarrow \\ E &= \frac{2n(n + 1)(2n + 1)}{3} - 2n(n + 1) + n \ \Rightarrow \ E &= \frac{2n(n + 1)(2n + 1) - 3 \cdot 2n(n + 1) + 3n}{3} \\ \Rightarrow \ E &= \frac{2n(n + 1) \cdot (2n + 1 - 3) + 3n}{3} \ \Rightarrow \ E &= \frac{2n(n + 1) \cdot (2n - 2) + 3n}{3} \\ \Rightarrow \ E &= \frac{4n(n^2 - 1) + 3n}{3} \ \Rightarrow \ E &= \frac{n(4n^2 - 4 + 3)}{3} \ \therefore \ E &= \frac{n(4n^2 - 1)}{3} \ . \end{split}$$

Como queríamos provar.

Exemplo Resolvido 16: Prove que

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{split} E &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + \left(n-1\right) \cdot n + n \cdot \left(n+1\right) \implies E = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \left(i+1\right) \\ \Rightarrow E &= \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + i\right) \implies E = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i \implies E = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ \Rightarrow E &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6} \implies E = \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} \\ \Rightarrow E &= \frac{n(n+1) \cdot \left(2n+4\right)}{6} \implies E &= \frac{n(n+1) \cdot \left(2n+4\right)}{6} \implies E &= \frac{n(n+1) \cdot \left(2n+4\right)}{6} \end{cases} \therefore \begin{bmatrix} E &= \frac{n(n+1) \cdot \left(2n+4\right)}{3} \end{bmatrix}.$$

Como queríamos provar.

Exemplo Resolvido 17: Prove que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{(n+1)}.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{split} E &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \implies E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} \\ \Rightarrow E &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1+i-i}{i \cdot (i+1)} \implies E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1 \neq i}{i \cdot (i+1)} - \frac{1}{1 \cdot (i+1)} \implies E = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \\ \Rightarrow E &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \implies E = \frac{n+1-1}{n+1} \therefore \boxed{E = \frac{n}{n+1}}. \end{split}$$

Como queríamos provar.

1.6) Definição de Produtório

Dada a sequência $(a_1, a_2, ..., a_n)$, podemos escrever o produto de seus termos como $\prod_{i=1}^n a_i$ (lê-se: produtório de a_i , quando i vai de 1 até n).

1.7) Propriedades do Produtório

Vejamos algumas propriedades bastante úteis!

P1) Produtório de uma constante: $\left| \prod_{i=1}^{n} c = c^{n} \right|$.

Demonstração:

$$\text{Da definição, temos: } \prod_{i=1}^n c = \overbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}^{\text{"n vezes"}} \; \therefore \; \left[\prod_{i=1}^n c = c^n \right].$$

P2) Produtório do termo geral com uma constante: $\left| \prod_{i=1}^{n} c \cdot a_{i} = c^{n} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i} \right|.$

A escrita deste volume 2 abriu as portas para uma nova visão da Matemática, uma vez que, atualmente, as pessoas querem separá-la por temas isolados. No entanto, acontece que não há um conteúdo isolado, pois todos os assuntos são interligados, e portanto a proposta do livro é fazer essa ligação. A coleção, em cinco volumes, aborda todos os assuntos da álgebra do ensino médio e também alguns tópicos abordados no ensino fundamental, de modo a relacionar cada tema com outros ramos da matemática. Assim, minha pretensão é que você, leitor amigo, obtenha o máximo de ferramentas possíveis para ultrapassar os obstáculos desses assuntos.

No capítulo 1, é abordada a indução matemática, uma belíssima ferramenta que uso para provar vários teoremas, a compreensão de somatórios e produtórios junto a suas respectivas propriedades; as somas telescópicas e frações parciais que, juntas, nos permitem resolver uma gama de problemas difíceis à primeira vista; a congruência linear e noções de raízes complexas da unidade para aplicarmos na fatoração de polinômios, abrindo mais uma possibilidade para fatorar, inclusive, polinômios de graus maiores.

Nos capítulos 2 e 3, viajamos no mundo das sequências. Inicio com as famosas progressões aritmética (P.A.) e geométrica (P.G.), utilizando os operadores matemáticos para tratar de progressões de ordem superior. Faço, também, uma abordagem com relação aos números binomiais e uma abordagem polinomial, depois parto para as aritmético-geométrica (P.A.G.) e geométrico-aritmética (P.G.A) e finalizo com a harmónica (P.H.). Em cada uma delas, busquei expor todas as propriedades e demonstrações de forma clara e concisa. Em seguida, temos as famosas sequências de Fibonacci, a de Lucas e (talvez a menos conhecida) a de Pell. Busquei, aqui, explorar as propriedades mais frequentes, as relações entre elas e entre o número de ouro.

No capítulo 4, tratamos de um poderoso tema: Recorrências, que é uma nova maneira de trabalhar com sequências, buscando "fórmulas fechadas" ou termos gerais. Faço, nesse sentido, um estudo completo, mostrando cada passagem de forma que até um leitor iniciante no assunto conseguirá entendê-la e assimilá-la.

Já o capítulo 5 é dedicado às desigualdades, um tema bastante comum nas olimpíadas. Nesse capítulo, procurei diversificar as desigualdades; assim, o leitor terá uma gama de possibilidades para "atacar" os problemas, na medida em que cada uma delas é demonstrada (algumas delas com mais de uma demonstração).

No final da obra, temos os capítulos 6 e 7 com as respostas e as resoluções, respectivamente. E, ainda, alguns capítulos têm os tópicos avançados (propriedades não demonstradas).

Espero que você aproveite cada página desta obra, que foi feita com muito esmero. Vejo você, amigo leitor, no volume 3.

Miller Dias de Araújo





